

- **Roulement sans glissement** : La relation entre l'angle de rotation θ du disque et le déplacement x est :

$$\theta = \frac{x}{R}.$$

- **Étirement total du ressort** :

- L'extrémité du ressort attachée au centre du disque se déplace de x .
- L'autre extrémité, fixée à la périphérie, subit un déplacement de :

$$x + R\theta \quad \text{avec } R\theta = x \implies x + R\theta = x + x = 2x.$$

- L'étirement total du ressort est donc :

$$\Delta x_{\text{ressort}} = x + 2x = 3x.$$

2) Masse équivalente du système

L'énergie cinétique totale du disque combine translation et rotation :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad \text{où } \omega = \frac{\dot{x}}{R}.$$

Avec $I = \frac{1}{2}mR^2$, on remplace :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mR^2 \right) \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2.$$

Simplifions la deuxième partie :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mR^2 \right) \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 = \frac{1}{4}m\dot{x}^2.$$

Donc l'énergie cinétique devient :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{2}m \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}m \right) \dot{x}^2.$$

Ainsi, la **masse équivalente** est :

$$m_{\text{eq}} = \frac{3}{2}m.$$

La force exercée par le ressort est proportionnelle à l'étirement total :

$$F_{\text{ressort}} = k \cdot \Delta x_{\text{ressort}} = k \cdot (3x).$$

Donc, la **raideur équivalente** est :

$$k_{\text{eq}} = 3k.$$

$$m_{\text{eq}}\ddot{x} + k_{\text{eq}}x = 0.$$

En remplaçant $m_{\text{eq}} = \frac{3}{2}m$ et $k_{\text{eq}} = 3k$:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + 3kx = 0.$$

Simplifions :

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0.$$

Les rapports cinématiques des engrenages sont :

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_3}.$$

Pour les déplacements angulaires :

$$\theta_2 = \frac{R_1}{R_2} \theta_1 \quad \text{et} \quad \theta_3 = \frac{R_1}{R_3} \theta_1.$$

L'énergie cinétique totale :

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2.$$

Avec $I = \frac{1}{2} m R^2$ pour des disques :

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2, \quad I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2, \quad I_3 = \frac{1}{2} m_3 R_3^2.$$

Substituons $\dot{\theta}_2 = \frac{R_1}{R_2} \dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_3 = \frac{R_1}{R_3} \dot{\theta}_1$:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_3 \left(\frac{R_1}{R_3} \right)^2 \dot{\theta}_1^2.$$

Substituons I_1, I_2, I_3 :

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_1 R_1^2 \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_2 R_2^2 \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_3 R_3^2 \cdot \frac{R_1^2}{R_3^2} \right) \dot{\theta}_1^2.$$

$$T = \frac{1}{4} m_1 R_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4} m_2 R_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4} m_3 R_1^2 \dot{\theta}_1^2.$$

Facteur commun :

$$T = \frac{1}{4} R_1^2 \dot{\theta}_1^2 (m_1 + m_2 + m_3).$$

Le moment d'inertie équivalent est donc :

$$I_{\text{eq}, \theta_1} = \frac{1}{2} R_1^2 (m_1 + m_2 + m_3).$$

La force de rappel du ressort de torsion est :

$$M = k \theta_3.$$

Avec $\theta_3 = \frac{R_1}{R_3} \theta_1$:

$$M = k \frac{R_1}{R_3} \theta_1.$$

La raideur équivalente est donc :

$$k_{\text{eq}, \theta_1} = k \frac{R_1}{R_3}.$$

c) Moment d'inertie équivalent pour θ_3

Les relations cinématiques sont inversées :

$$\theta_1 = \frac{R_3}{R_1}\theta_3, \quad \theta_2 = \frac{R_3}{R_2}\theta_3.$$

L'énergie cinétique totale est :

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2.$$

Substituons $\dot{\theta}_1 = \frac{R_3}{R_1}\dot{\theta}_3$ et $\dot{\theta}_2 = \frac{R_3}{R_2}\dot{\theta}_3$:

$$T = \frac{1}{2}I_1 \left(\frac{R_3}{R_1} \right)^2 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}I_2 \left(\frac{R_3}{R_2} \right)^2 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2.$$

En utilisant I_1, I_2, I_3 :

$$T = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \frac{R_3^2}{R_1^2} \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \frac{R_3^2}{R_2^2} \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \dot{\theta}_3^2.$$

Simplifions chaque terme :

$$T = \frac{1}{4} m_1 R_3^2 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{4} m_2 R_3^2 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{4} m_3 R_3^2 \dot{\theta}_3^2.$$

Facteur commun :

$$T = \frac{1}{4} R_3^2 \dot{\theta}_3^2 (m_1 + m_2 + m_3).$$

Le moment d'inertie équivalent est donc :

$$I_{\text{eq},\theta_3} = \frac{1}{2} R_3^2 (m_1 + m_2 + m_3).$$

d) Fréquence naturelle

La fréquence naturelle est donnée par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{\text{eq},\theta_1}}{I_{\text{eq},\theta_1}}}.$$

En remplaçant $k_{\text{eq},\theta_1} = k \frac{R_1}{R_3}$ et $I_{\text{eq},\theta_1} = \frac{1}{2} R_1^2 (m_1 + m_2 + m_3)$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k \frac{R_1}{R_3}}{\frac{1}{2} R_1^2 (m_1 + m_2 + m_3)}}.$$

Simplifions :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{R_1 (m_1 + m_2 + m_3) R_3}}.$$

- **Énergie cinétique du disque :**

Le disque a une énergie cinétique de translation et de rotation :

$$T_{\text{disque}} = \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2.$$

Avec la condition de roulement sans glissement : $\omega = \frac{\dot{x}}{r}$, donc :

$$T_{\text{disque}} = \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_0\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2.$$

- **Énergie cinétique du chariot :**

$$T_{\text{chariot}} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2.$$

- **Énergie cinétique totale :**

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I_0}{r^2}\right)\dot{x}^2.$$

- **Énergie potentielle du ressort k_1 :**

$$V_{k_1} = \frac{1}{2}k_1x^2.$$

- **Énergie potentielle du ressort k_2 :**

L'étirement du ressort k_2 est la somme de deux contributions :

- La translation du centre du disque (x).
- La rotation due à la distance a : $\Delta = a \cdot \frac{x}{r} = \frac{a}{r}x$.

L'étirement total du ressort k_2 est donc :

$$\Delta_{k_2} = x + \frac{a}{r}x = \left(1 + \frac{a}{r}\right)x.$$

L'énergie potentielle du ressort k_2 est :

$$V_{k_2} = \frac{1}{2}k_2\left[\left(1 + \frac{a}{r}\right)x\right]^2.$$

- **Énergie potentielle totale :**

$$V = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2\left[\left(1 + \frac{a}{r}\right)x\right]^2.$$

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2.$$

4. Équation de Lagrange

L'équation de Lagrange est :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

- Dérivées du terme cinétique (T) :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(m_1 + m_2 + \frac{I_0}{r^2} \right) \dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \left(m_1 + m_2 + \frac{I_0}{r^2} \right) \ddot{x}.$$

- Dissipation (D) :

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}.$$

- Dérivées de l'énergie potentielle (V) :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k_1 x + k_2 \left(1 + \frac{a}{r} \right)^2 x.$$

L'équation devient :

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I_0}{r^2} \right) \ddot{x} + c\dot{x} + \left[k_1 + k_2 \left(1 + \frac{a}{r} \right)^2 \right] x = 0.$$

- Masse équivalente :

$$m_{\text{eq}} = m_1 + m_2 + \frac{I_0}{r^2}.$$

- Raideur équivalente :

$$k_{\text{eq}} = k_1 + k_2 \left(1 + \frac{a}{r} \right)^2.$$

- Amortissement équivalent :

$$c_{\text{eq}} = c.$$

L'équation de mouvement devient :

$$m_{\text{eq}} \ddot{x} + c_{\text{eq}} \dot{x} + k_{\text{eq}} x = 0.$$

c) Fréquence naturelle amortie

La fréquence naturelle amortie est donnée par :

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2},$$

où :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{\text{eq}}}{m_{\text{eq}}}}, \quad \zeta = \frac{c_{\text{eq}}}{2\sqrt{m_{\text{eq}} k_{\text{eq}}}}.$$

En remplaçant m_{eq} , k_{eq} , et c_{eq} , on peut obtenir une expression complète pour ω_d .